СЕКЦІЯ 7

ІНФОРМАЦІЙНИЙ ЗАХИСТ ЕКОНОМЕТРИЧНИХ ДАНИХ І АРИФМЕТИКА ФРАКТАЛІВ

Керівники секції: **Великий Анатолій Павлович, Турбін Анатолій Федорович, Працьовитий Микола Вікторович**

Великий А.П., Турбин А.Ф.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ А.И. ЛОБАНОВА

Преобразования А.И. Лобанова – это преобразования n-мерного арифметического пространства A^n в себя, образующие группу, изоморфную прямому произведению циклической группы C_2 и симметрической группы перестановок S_{n+1} и имеющей порядок $2((n+1)!)$, что в $2(n+1)$ раз больше порядка $n!$ симметрической группы перестановок S_n. Применительно к задачам кодирования цифровой информации преобразование А.И. Лобанова сводится к последовательному использованию двух простых арифметических операций – сложения и вычитания. Так, если $X_n = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – цифровое сообщение длины n, то его образ при i-м преобразовании А.И. Лобанова , $i = 1,2,...,n$ (L_i-образ) имеет вид

$$L_i(X_n) = (x_1 - x_i, x_2 - x_i, ..., x_{i-1} - x_i, -x_i, x_{i+1} - x_i, ...x_n - x_i)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Великий А.П., Турбин А.Ф., Преобразования А.И. Лобанова//Кибернетика и системный анализ (в печати)

Працьовитий М.В., Торбін Г.М.

АНАЛІТИЧНЕ (СИМВОЛЬНЕ) ПРЕДСТАВЛЕННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ R^1, ЩО ЗБЕРІГАЮТЬ ФРАКТАЛЬНУ РОЗМІРНІСТЬ ХАУСДОРФА-БЕЗИКОВИЧА

Під *аналітичним завданням (представленням) перетворення* ми розуміємо формули, що встановлюють зв'язок між координатами довільної точки M простору R^n і її образу M' в одній і тій же системі координат.

Фрактальним перетворенням будемо називати неперервне перетворення f, яке зберігає розмірність Хаусдорфа-Безиковича, тобто для довільної обмеженої множини E і її прообразу $f^1(E)$ має місце рівність $\alpha_0(f^{-1}(E)) = \alpha_0(E)$, де $\alpha_0(A)$ — розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини A.

Як відомо, група H_f перетворень, що зберігають фрактальну розмірність, містить групу афінних перетворень, яка, в свою чергу, містить підгрупу перетворень подібності, але далеко цими перетвореннями не вичерпується [1-3].

Як свідчать "тонкі" приклади фрактальних перетворень відрізка [0;1], наведені в [1], надії на те, що адекватна для них система координат може відносно просто визначатись, немає. Вона має "враховувати" складну локальну будову фрактальних множин (фракталів).

Обмежимось поки що розглядом неперервних перетворень відрізка [0;1]. Як відомо, до таких відносяться лише строго монотонні функції $f(x)$, такі, що $f(x)=F(x)$ або $f(x)=1- F(x)$, де $F(x)$ — неперервна функція розподілу ймовірності на [0;1].

Локально тонкі системи координат на $[0;1]\subset R^1$

Позначатимемо через

$$\Delta_{c_1\ldots c_k},\quad c_k\in A=N_0^1=\{0,1\}$$

відрізок числової прямої, а через $\nabla_{c_1\ldots c_k}$ — інтервал з тими ж самими кінцями, вважаючи, що завжди

$\inf\Delta_{c_1\ldots c_{k-1}0}<\inf\Delta_{c_1\ldots c_{k-1}1}$.

Нехай задана система Ф подрібнюючих розбиттів [0;1]:

$[0;1]=\Delta_0\bigcup\Delta_1,\quad \nabla_0\bigcap\nabla_1=\varnothing,$

$\Delta_{i_1}=\Delta_{i_10}\bigcup\Delta_{i_11},\quad \nabla_{i_10}\bigcap\nabla_{i_11}=\varnothing,\quad i_1\in A=\{0;1\},$

$\Delta_{i_1\ldots i_m}=\Delta_{i_1\ldots i_m0}\bigcup\Delta_{i_1\ldots i_m1},\quad \nabla_{i_1\ldots i_m0}\bigcap\nabla_{i_1\ldots i_m1}=\varnothing,\quad i_j\in A=\{0;1\},\quad j=\overline{1,m}$ і

$|\Delta_{i_1\ldots i_m}|\to 0\quad (m\to\infty)$.

Вона визначає систему координат на [0;1], тобто сукупність умов для визначення положення точки.

Справді, множина

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}\Delta_{i_1\ldots i_m},$$

згідно з аксіомою Кантора, містить одну точку x, яку природно позначити $\Delta_{i_1\ldots i_m}$. З іншого боку, для кожної точки відрізка [0;1] існує нескінченна послідовність вкладених відрізків

$$\Delta_{i_1},\ \Delta_{i_1i_2},\ \ldots,\ \Delta_{i_1\ldots i_m},\ \ldots,$$

які містять цю точку. Те, що $x=\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ ми символічно будемо зображати

$$x=\Delta^{\Phi}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_m(x)\ldots}.$$

Таку систему подрібнюючих розбиттів Ф називатимемо *локально тонкою системою координат на* [0;1], скорочено: ЛТСК.

Координатами точки x в ЛТСК Ф називатимемо впорядкований набір $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots)$ такий, що

$x=\Delta^{\Phi}_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}$.

При цьому α_k називається k-тою Ф-координатою або Ф-двійковим кодом x.

Відрізок $\Delta_{c_1\ldots c_m}$ містить ті і тільки ті точки, що мають перші m Ф-координат відповідно рівні c_1, c_2, ..., c_m. Його ще називатимемо *циліндричною множиною (циліндром)* m*-го рангу з основою* $c_1c_2\ldots c_m$.

Легко бачити, що для деяких точок (їх зчисленна множина) координати визначаються неоднозначно, оскільки

$$\Delta^{\Phi}_{i_1\ldots i_m 0\ldots 0\ldots} = \Delta^{\Phi}_{i_1\ldots i_{m-1} 01\ldots 1\ldots}.$$

Теорема 1. *Якщо Φ_1 і Φ_2 — дві ЛТ системи координат на* $[0;1]$*, то існує єдине неперервне перетворення f, яке переводить Φ_1 в Φ_2. При цьому точка x, яка має координати $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots)$ в системі Φ_1 переходить в точку x', яка в системі Φ_2 має такі ж самі координати, тобто*

$$x' = \Delta^{\Phi_2}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots} = f(\Delta^{\Phi_1}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}).$$

Теорема 2. *Образом локально тонкої системи координат при неперервному перетворенні f відрізка* $[0;1]$ *є локально тонка система координат.*

Теорема 3. *Якщо Φ_1 — фрактальна система координат на відрізку* $[0;1]$*, а f — фрактальне перетворення* $[0;1]$*, то f подається у вигляді*

$$f(x) = f(\Delta^{\Phi_1}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}) = \Delta^{\Phi_2}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots},$$

де Φ_2 — образ Φ_1 при перетворенні f. При цьому

$$\frac{|\Delta^{\Phi_1}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}|}{|\Delta^{\Phi_2}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}|} \to 1$$

для всіх $x \in [0;1]$ за виключенням, можливо, аномально фрактальної множини точок $x \in [0;1]$.

Теорема 4. *Якщо Φ_1 і Φ_2 — дві ЛТСК, то функція*

$$x' = f(x) = \Delta^{\Phi_2}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}$$

де $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\ldots)$ — координати точки x в ЛТСК Φ_1 і

$$\forall x \in (0;1): \qquad \frac{|\Delta^{\Phi_1}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}|}{|\Delta^{\Phi_2}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}|} \to 1 \quad (k \to \infty)$$

зберігає фрактальну розмірність Хаусдорфа-Безиковича.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.,* Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension. — Preprint SFB-256, Bonn, 2001 (No. 751). — 35p.
2. *S. Albeverio, M. Pratsiovytyi, G. Torbin,* Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension // Ergodic Theory and Dynamical Systems. — 2004, 24, No. 1. — P. 1-16.
3. *Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Фрактальна геометрія та перетворення, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича // Динамічні системи: Праці Українського математичного конгресу - 2001. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. — С.77-93.

Турбин А.Ф., Иванов Г.А.

КОРРЕКТНЫЕ МОДЕЛИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ РЕГРЕССИОННОЙ ЗАВИСИМОСТИ

Более пятнадцати лет назад в работе [1] мы акцентировали внимание на том, что применительно к обработке результатов метрологических измерений (дорогостоящие либо уникальные эксперименты), принятие решения о параметрах и, тем более, порядке полиномиальной регрессии, основанное на методах, излагаемых в литературе по прикладной статистике (например, [2]) приводит к неверным выводам

Эконометрические измерения не относятся к разряду дорогостоящих, но, тем не менее, уникальны в том смысле, что решение, как правило, принимается на основе единственной выборки.

В докладе излагается уточнённый критерий, позволяющий по единственной серии статистических данных различать гипотезы о порядке полиномиальной регрессии. Критерий основан на учёте зависимости в отношении остаточных дисперсий сравниваемых гипотез.

ЛИТЕРАТУРА

1. Статистические методы восстановления истинной зависимости по опытным данным - Киев: Общество „Знание″ Украинской ССР, 1986. – 19 с.
2. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. – М.:Статистика, 1973. – 322 с.

Баев А.В., Бондарев Б.В., Колесников А.С.,

ВЫВОД НЕКОТОРЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ ПРОЦЕДУР, ОПИСЫВАЮЩИХ ДИНАМИКУ ФИНАНСОВОГО ПОТОКА БАНКА. ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Рассмотрим [1] следующую рекуррентную модель динамики финансовых ресурсов.

Пусть: t – индекс периода; x_t – объём собственных средств фирмы в начале t-го периода; s_t – объём привлечённых средств фирмы в начале t-го периода; $\Im_n$ – усреднённая норма затрат на единицу привлечённых средств; u – усреднённая норма дохода на единицу используемых средств; δ – доля собственных средств, превращаемых в активы. Тогда : us_t – затраты на привлечение средств в t-ом периоде;

$u(\delta x_t + s_t)$ – доход за t-й период, и величина собственных средств на начало $t+1$-го периода определяется рекуррентным соотношением

$$x_{t+1} = (1-\delta)x_{t+1} + u(\delta x_t + s_t) - us_t, \qquad (1)$$

а величина суммарных средств (с привлечением) на начало $t+1$-го периода определяется рекуррентным соотношением

$$z_{t+1} = ((1-\delta) + u\delta)z_t - ((1-\delta) + u(1-\delta) + \upsilon)s_t + s_{t+1} =$$
$$= ((1-\delta) + u\delta)z_t + (\alpha_{t+1} - ((1-\delta) + u(1-\delta) + \upsilon))s_t$$

В наиболее интересном случае для привлечения суммы s затраты равны привлечённой сумме s плюс проценты, то есть в конце периода t заёмщик должен выплатить кредитору (вкладчику) сумму $s(1+r_D)$,где r_D – ставка по депозитам. Таким образом, $\upsilon = 1 + r_D$.

При помощи аналогичных рассуждений убеждаемся в том, что $u = 1 + r_K$, где r_K – кредитная ставка, которая должна удовлетворять неравенству, $r_K > r_D$ так как в противном случае банку невыгодны были бы операции кредитования с привлечением депозитных средств.

Пусть $\theta = (1 - \delta + (1 + r_K)\delta)$. Тогда рекуррентное соотношение (1) примет вид:

$$x_{t+1} = \theta x_t + (r_K - r_D)s_t \qquad (2)$$

К затронутой тематике близко примыкают некоторые постановки из монографии [2]. Изложим необходимые результаты.

Пусть на момент времени t у банка-инвестора имеется сумма x_t .Предположим, что изменение цены акции за рассматриваемый период происходит по закону

$$P_{t+1} = P_t(1+\rho_t), M\rho_t = \rho > r_k \quad M\rho_t = \rho > r_k \qquad (3)$$

Пусть

$$\theta = (1-u)(1+\rho) + u(1+r_K) .$$

Тогда

$$x_{t+1} = \theta x_t + (1-u)x_t(\rho_{t+1} - \rho) \qquad (4)$$

Будем считать, что распределения случайных величин $\{\rho_t\}$ не зависят от времени, если случайные величины $\{\rho_t\}$ независимые, тогда процедура (4) определяет марковскую цепь. Предположим, что имеются наблюдения $\{x_1, x_2, ..., x_{n+1}, s_0, s_1, ..., s_n\}$, θ_n – оценка неизвестного параметра θ, полученная по методу наименьших квадратов. Будем также предполагать, что случайные величины $\{\rho - \rho_i\}, i \geq 0$ удовлетворяют условию Крамера

$$\left| M\alpha_i^{\ m} \right| \leq \frac{\sigma^2 H^{m-2}}{2} m!$$

$$P\{x_0 \sqrt{n}(|\theta_n - \theta \ | > R\} \leq 2\exp\left\{-\frac{1}{2H}R\right\}\exp\left\{\frac{1}{4H^2}\sigma^2(r_K - r_D)^2\right\}$$

Пусть $\gamma > 0$ - некоторое заранее заданное малое число. Пусть $R_\gamma > 0$ - наименьшее положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$2\exp\left\{-\frac{1}{2H}R_\gamma\right\}\exp\left\{\frac{1}{4H^2}\sigma^2(r_K - r_D)^2\right\} \leq \gamma$$

Тогда, очевидно, что с вероятностью, не меньшей чем $1-\gamma$, будет выполнено неравенство

$$\theta_n - \frac{R_\gamma}{x_0\sqrt{n}} \leq \theta \leq \theta_n + \frac{R_\gamma}{x_0\sqrt{n}} \qquad (6)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Конюховский П.В. Микроэкономическое моделирование банковской деятельности. – С-Пб.:ПИТЕР,2001. – 221 с.
2. Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А. Марковские процессы и их приложения. – М.:Наука, 1975 г. - 338 с.

Барановський О. М.

ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ, ЗАДАНІ РОЗПОДІЛАМИ РІЗНИЦЬ ПОСЛІДОВНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЇХ РЯДІВ ОСТРОГРАДСЬКОГО

Відомо [1], що кожне число $x \in [0;1]$ можна подати у вигляді

$$x = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_1 q_2 \cdots q_n} + \ldots = O_1(0; q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots), \qquad (1)$$

де q_k — натуральні числа і $q_{k+1} > q_k \ \forall k \in \mathbf{N}$ (вираз (1) називається *рядом Остроградського* 1*-го виду* або O_1*-представленням* числа x),

або, поклавши $g_1 = q_1$, $g_{k+1} = q_{k+1} - q_k$, у вигляді

$$x = \frac{1}{g_1} - \frac{1}{g_1(g_1+g_2)} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{g_1(g_1+g_2)\ldots(g_1+g_2+\ldots+g_n)} + \ldots = \overline{O}_1(0; g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots) \quad (2)$$

(вираз (2) називається $\overline{O}_1$*-представленням* числа x, а числа $g_k \in \mathbf{N}$ — $\overline{O}_1$*-елементами* числа x).

Вивчається випадкова величина

$\xi = \overline{O}_1(0; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, \ldots)$,

$\overline{O}_1$-елементи η_k якої є незалежними випадковими величинами, що набувають значень 1, 2, … , m, … з ймовірностями $p_{1k}, p_{2k}, \ldots, p_{mk}, \ldots$ відповідно.

Основним завданням дослідження є структура розподілу випадкової величини ξ (тобто вміст дискретної, сингулярної та абсолютно неперервної компонент) [2].

Теорема 1. *Випадкова величина* ξ *має чистий розподіл, тобто чисто дискретний, чисто сингулярний або чисто абсолютно неперервний.*

Теорема 2. *Випадкова величина* ξ *має дискретний розподіл тоді і тільки тоді, коли*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_m \{p_{mk}\} > 0 \qquad (3)$$

і неперервний розподіл тоді і тільки тоді, коли нескінченний добуток в (3) *розбігається до* 0.

Теорема 3. *Якщо нескінченний добуток в* (3) *розбігається до* 0*,* k*-ий стовпчик матриці* $\|p_{mk}\|$ *містить* N_k *додатних елементів і* $\varliminf_{k\to\infty} \frac{N_1 N_2 \cdots N_k}{(k+1)!} = 0$*, то випадкова величина* ξ *має сингулярний розподіл канторівського типу* (*тобто міра Лебега спектра* S_ξ *розподілу випадкової величини* ξ *дорівнює* 0).

ЛІТЕРАТУРА

1. Ремез Е. Я. О знакопеременных рядах, которые могут быть связаны с двумя алгорифмами М. В. Остроградского для приближения иррациональных чисел // Успехи мат. наук. — 1951. — **6**, № 5 (45). — С. 33-42.
2. Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

Бондарев Б.В., Ковтун Е.Е.

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СБЛИЖЕНИЯ НОРМИРОВАННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ С СЕМЕЙСТВОМ ВИНЕРОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Пусть $\{\Omega, \Im, P\}$ – полное вероятностное пространство, $\{\Im_0^e, t \succ 0\}$ –неубывающее семейство σ-алгебр, $\{W_t, \Im_0^t, t \ge 0\}$ – одномерный стандартный винеровский процесс.

Пусть

$$d\xi_t = a(\xi_t)dt + \sigma(\xi_t)dW_t, t \ge 0 \qquad (1)$$

с произвольным начальным условием ξ_0. Относительно коэффициентов уравнения (1) будем предполагать выполнение условия Липшица, т.е. выполнения условия

$$|a(x) - a(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \le C|x - y|, \, 0 < C < +\infty \qquad (2)$$

для всех $x, y \in R_1$.

Для всякого m с целыми координатами

$$a(x+m) = a(x), \sigma(x+m) = \sigma(x), \qquad (3)$$

т.е. функции $a(x), \sigma(x)$ периодичны с периодом 1. Относительно функции $\sigma(x)$ потребуем также выполнения условия

$$0 < \gamma \le |\sigma(x)| \le \frac{1}{\gamma}, \gamma \in (0,1] \qquad (4)$$

Пусть

$$\bar{\psi}(x) = \vartheta^{-1}(x)\left[\int_0^x \vartheta(y)\frac{2\left[\sigma^2(y)\psi^2(y) - \sigma_0^2\right]}{\sigma^2(y)}dy + \frac{\vartheta^{-1}(1)}{\left[1-\vartheta^{-1}(1)\right]}\left[\int_0^1 \vartheta(y)\frac{2\left[\sigma^2(y)\psi^2(y) - \sigma_0^2\right]}{\sigma^2(y)}dy\right]\right]$$

$$\psi(x) = \vartheta^{-1}(x)\left[\int_0^x \vartheta(y)\frac{2\left[f(y) - \bar{f}\right]}{\sigma^2(y)}dy + \frac{\vartheta^{-1}(1)}{\left[1-\vartheta^{-1}(1)\right]}\left[\int_0^1 \vartheta(y)\frac{2\left[f(y) - \bar{f}\right]}{\sigma^2(y)}dy\right]\right] \qquad (5)$$

где

$$\bar{f} = \int_0^1 f(x)\psi(x)dx$$

Теорема. *Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям (2)-(4). Функция $f(x)$-непрерывная ,1-периодическая. Тогда справедлива оценка*

$$\sup_{0\le t\le 1} M\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{tn} \left[f(\xi_s) - \bar{f}\right]ds - \sigma_0\frac{W_{nt}}{\sqrt{n}}\right| \le \frac{2D_1 + 2D_2}{\sqrt{n}} + \frac{4\sigma_0}{\sqrt{n}} \to 0, n \to +\infty \qquad (6)$$

где $\int\limits_0^1 \sigma^2(x)\overline{\psi}^2(x)\rho(x))dt = \sigma_0^2$, функции $\overline{\psi}(x)$ и $\psi(x)$ выписаны, постоянные D_1, D_2 определены соотношениями

$$D_1 = \int\limits_0^1 |\psi(x)| dx, D_2 = \int\limits_0^1 |\overline{\psi}(x)| dx,$$

Доказательство проводится по следующей схеме: для заданных $a(x), \sigma(x)$ введём линейный оператор

$$LU = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2U}{dx^2} + a(x)\frac{dU}{dx}$$

Имеет место следующее утверждение:

Лемма 1. (лемма $1[1]$). *Пусть* $a(x), \sigma(x)$ *удовлетворяют условиям* (2)-(4). *Тогда для произвольной 1-периодической функции* $f(x)$ *существует и единственна постоянная* $\bar{f}$ *, такая, что периодическая задача*

$$LU = f - \bar{f}, U(0) = U(1), U'(0) = U'(1) \qquad (7)$$

имеет единственное решение, принадлежащее пространству Соболева $W^{2,p}[0,1]$ при каждом $p \in [1, +\infty)$. Это решение единственно с точностью до постоянной.

Следует отметить, что постоянная $\bar{f}$ подсчитывается по формуле

$$\bar{f} = \int\limits_0^1 f(x)\psi(x)dx,$$

где $\psi(x)$ – решение сопряжённой периодической задачи однозначно определённой условием нормировки для всех решений сопряжённой задачи (7). Применяя формулу Ито к процессу $U(\xi_t)$, получим

$$d_t U(\xi_t) = LU(\xi_t)dt + \sigma(\xi_t)\frac{dU(\xi_t)}{dx}dW_t \qquad (8)$$

Из (8) в силу (7) следует

$$d_t U(\xi_t) = [f(\xi_t) - \bar{f}]dt + \sigma(\xi_t)\frac{dU(\xi_t)}{dx}dW_t \qquad (9)$$

Интегрируя (8), имеем

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_0^{tn} [f(\xi_s) - \bar{f}]ds = \frac{U(\xi_{tn}) - U(\xi_{t0})}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_0^{tn} \sigma(\xi_s)\frac{dU(\xi_s)}{dx}dW_s \qquad (10)$$

Исследуя соотношение (10), убеждаемся в справедливости теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сафонова О.А. Об асимптотическом поведении интегральных функционалов от диффузионных процессов с периодическими коэффициентами //Украинский математический журнал - 1992.– Т.44. – С. 245-252.

Великий А.П., Жданова Ю.Д., Турбин А.Ф.

АФФИННОЕ L-АВТОКОДИРОВАНИЕ ЦИФРОВОЙ ИНФОРМАЦИИ В КОРПОРАТИВНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СЕТЯХ

Пусть $X_n = (x_1, x_2, ..., x_n)$ - цифровое сообщение длины n, x_i - элементы фиксированного конечного поля. Алгоритм автокодирования сообщения X_n основан на тройном применении преобразования А.И. Лобанова [1] и генерирования последовательностей структурно усложняющихся накрывающих последовательностей и в качестве первого этапа приводит к кодированному сообщению вида

$$Y = (L_k^{out}(L_i^{in}(X) + L_j^{on}(Z))$$

где $L_k^{out}, L_i^{in}, L_j^{on}$ - преобразования А.И. Лобанова, Z - база накрывающей последовательности.

Литература:

Великий А.П., Турбин А.Ф., Преобразования А.И. Лобанова //Кибернетика и системный анализ (в печати).

Гончаренко Я.В.

ЗГОРТКИ РОЗПОДІЛІВ СУМ ВИПАДКОВИХ РЯДІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИДУ

В роботі розглядають згортки розподілів сум випадкових рядів спеціального виду, для яких розв’язуються задачі про тип розподілу, тополого-метричні та фрактальні властивості спектра (мінімальної множини, на якій зосереджений розподіл). Розподіли, що розглядаються в роботі, є узагальненням досить популярного сьогодні в дослідженнях об’єкта — симетричних згорток Бернуллі, значний інтерес до яких відновився в 80-ті роки XX століття у зв’язку з їх важливістю для дослідження багатьох проблем динамічних систем (зокрема, в дослідженнях критичних параметрів систем).

Основним об’єктом дослідження в роботі є згортки сингулярних розподілів, з якими пов’язано ряд важливих проблем теорії ймовірностей. Крім того, підвищення інтересу до сингулярних розподілів пов’язано також з тим, що вони зосереджені на фракталах. А останні, як відомо, сьогодні досить популярні в дослідженнях і застосуваннях. Теорія фракталів — одна з найбільш прогресуючих галузей сучасної науки. Фрактали широко використовуються як в математиці (в теорії ймовірностей, теорії чисел, теорії динамічних систем теорії похибок, теорії збурень лінійних операторів, при створенні методів стиску та кодування графічної інформації), так і далеко за її межами. Зокрема, вони служать для створення адекватних моделей реальних процесів і явищ у фізиці, астрономії, матеріалознавстві, теорії протікання, біології тощо.

В роботі розглядається випадкова величина, що є сумою випадкового ряду:

$$\varsigma = \sum_{k=1}^{\infty} \varsigma_k b_k, \qquad \text{де} \quad b_k > 0, \quad b_k > b_{k+1}, \quad r'_0 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k = 1, \quad r'_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} b_i, \quad b_k > 2r'_k, \quad (1)$$

де ς_k — незалежні випадкові величини, що набувають значень 0 і 1 з ймовірностями p_{0k} і p_{1k} відповідно ($p_{ik} \geq 0$, $p_{0k} + p_{1k} = 1$).

Розглядається сума ξ двох незалежних випадкових величин ς^1 і ς^2, представлених у вигляді (1): $\varsigma^i = \sum_{k=1}^{\infty} \varsigma_k^{(i)} b_k$, де $\varsigma_k^{(i)}$ — незалежні випадкові величини з наступними розподілами:

$$\begin{array}{ccc} \varsigma_k^{(i)} & 0 & 1 \\ & p_{0k}^{(i)} & p_{1k}^{(i)} \end{array}, \qquad p_{jk}^{(i)} \geq 0, \ \ p_{0k}^{(i)} + p_{1k}^{(i)} = 1 .$$

Вона має вигляд:

$$\xi = \varsigma^1 + \varsigma^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k a_k . \qquad (2)$$

Очевидно, що $a_{2m-1} = a_{2m} = b_m$, $a_k > 0$, $a_k \geq a_{k+1}$, $r_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 2$,

$r_1 > a_1 = a_2 > r_2 > r_3 > a_3 = a_4 > r_4 > r_5 > a_5 = \ldots$,

τ_k — незалежні випадкові величини, що набувають значень 0 і 1 з ймовірностями

$$p_{0(2k-1)} = p_{0k}^{(1)}, p_{0(2k)} = p_{0k}^{(2)}, p_{1(2k-1)} = p_{1k}^{(1)}, p_{1(2k)} = p_{1k}^{(2)},$$

відповідно ($p_{ik} \geq 0 \setminus p_{0k} + p_{1k} = 1$).

Для випадкової величини ξ вивчаються тополого-метричні властивості її спектра.

Теорема 1. *Спектр S_ξ випадкової величини ξ є ніде не щільною множиною, яка належить об'єднанню* $m_k = \begin{cases} 2 \cdot 3^{\frac{k-1}{2}} & \text{при } k = 2m+1, \\ 3^{\frac{k}{2}} & \text{при } k = 2m; \end{cases}$ *відрізків k-го рангу.*

Міра Лебега спектра обчислюється за формулою:

$$\lambda(S_\xi) = 2 - \sum_{m=1}^{\infty} 2 \cdot 3^{m-1} (a_{2m} - r_{2m}) .$$

Знайдено критерії канторовості та квазіканторовості розподілу випадкової величини ξ.

Теорема 2. *Випадкова величина ξ має сингулярний розподіл канторівського типу тоді і тільки тоді, коли* $\sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_{2k} - 1) = \infty$.

Теорема 3. *Випадкова величина ξ має ніде не щільний спектр додатної міри Лебега тоді і тільки тоді, коли* $\sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_{2k} - 1) < \infty$.

Наслідок. *Випадкова величина ξ не може мати розподіл салемівського типу.*

Повністю розв'язано задачу про тип розподілу ξ, тобто доведено критерій належності розподілу ξ до кожного з чистих типів.

Теорема 4. *Випадкова величина ξ має чистий тип розподілу, причому*

1) чисто дискретний тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_i p_{ik}^* > 0 , \qquad (3)$$

2) чисто абсолютно неперервний тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left[\sqrt{\frac{r_{2(k+1)}}{r_{2k}}}\left(\begin{array}{l}\sqrt{p_{0(2k-1)}p_{0(2k)}}+\\+\sqrt{p_{1(2k-1)}p_{0(2k)}+p_{0(2k-1)}p_{1(2k)}}+\sqrt{p_{1(2k-1)}p_{1(2k)}}\end{array}\right)\right]>0, \qquad (4)$$

3) чисто сингулярний тоді і тільки тоді, коли нескінченні добутки (3) і (4) розбігаються до нуля.

Доведено, що при певних обмеженнях на елементи ряду a_k при обчисленні розмірності Хаусдорфа-Безиковича будь-якої множини $M \subset R^1$, елементи якої задані своїм Q^*-представленням, можна обмежитись покриттями ранговими відрізками Q^*-розбиття.

Введено означення розмірності Хаусдорфа-Безиковича розподілу випадкової величини, а також доводиться формула її обчислення для розподілу даної випадкової величини ξ.

<u>Означення.</u> *Розмірністю Хаусдорфа-Безиковича розподілу випадкової величини ξ називається величина $\alpha_0(\xi)=\inf\limits_{E\in N(\xi)}\{\alpha_0(E),\ E\in \mathrm{B}\}$, де B — борелівська σ-алгебра підмножин числової осі, $N(\xi)$ — клас всеможливих "носіїв" розподілу випадкової величини ξ, тобто $N(\xi)=\{E : E\in \mathrm{B},\ P_\xi(E)=1\}$.*

Позначимо $h_k=-(p^*_{0k}\ln p^*_{0k}+p^*_{2k}\ln p^*_{2k}+p^*_{4k}\ln p^*_{4k})$, $H_n=\sum\limits_{k=1}^{n}h_k$,

$$b_k=-\ln\frac{r_{2(k+1)}}{r_{2k}},\ B_n=\sum_{k=1}^{n}b_k=-\ln\frac{r_{2(n+1)}}{r_2}.$$

Теорема 5. *Якщо $\sup\limits_k\frac{a_{2k}}{r_{2k}}=\gamma_0<\infty$, то розмірність Хаусдорфа-Безиковича розподілу випадкової величини ξ $\alpha_0(\xi)=\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{H_n}{G_n}$.*

Теорема 5 використовується для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича спектра згортки розподілів сум випадкових рядів, а також спектрів компонент згортки.

Теорема 6. *Якщо*

$\sup\limits_k\frac{a_{2k}}{r_{2k}}=\gamma_0<\infty$ *і* $p^*_{ik}>0\ \ \forall i\in\{0,2,4\},\ \forall k\in N$,

то розмірність Хаусдорфа-Безиковича спектра розподілу випадкової величини ξ обчислюється за формулою:

$$\alpha_0(S_\xi)=-\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{n}{\log_3\frac{r_{2n+2}}{r_2}}.$$

Наслідок 1. *Якщо $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{2k}}{r_{2k}}\to 1$, то випадкова величина має ξ суперфрактальний розподіл ($\alpha_0(S_\xi)=1$).*

Наслідок 2. *Якщо $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{2k}-r_{2k}}{r_{2(k-1)}}\to\frac{1}{2}$, то випадкова величина ξ має аномально фрактальний розподіл ($\alpha_0(S_\xi)=0$).*

Дмитренко С.О.

ФРАКТАЛЬНІ МАТЕМАТИЧНІ ОБ’ЄКТИ В ДВІЙКОВИХ КОДАХ

Розглядається узагальнена модель представлення дійсних чисел за допомогою двох символів та можливість його використання для задання та дослідження фрактальних об’єктів. Нехай L – множина всеможливих нескінченних послідовностей з нулів та одиниць, тобто

$$L = \{\alpha : \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...) \equiv \{\alpha_n\}, \alpha_n \in \{0,1\} \ \forall n \in N\}.$$

Далі L називатимемо *простором послідовностей з нулів та одиниць*, а елементи множини L – *точками цього простору*.

В даному просторі введемо відношення порядку.

Лема. *Множина всіх відкритих множин* τ *є топологією в L.*

Побудуємо в даному просторі міру μ наступним чином: означимо

$$P_k = \{p_{0k}, p_{1k}\}, \text{ де } p_{ik} \geq 0 \text{ і } p_{0k} + p_{1k} = 1, \text{ для } \forall k \in N,$$

тоді $\mu(\Delta_{c_1...c_n}) = \prod_{i=1}^{n} p_{c_i i}$ і $\mu(\bigcup \Delta_{c_1...c_n}) = \sum \mu(\Delta_{c_1...c_n})$, де відрізки $\Delta_{c_1...c_n}$ не перетинаються.

Міра Хаусдорфа означиться:

$$H_\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf_{\mu(\Delta_{c_1...c_n}) \leq \varepsilon} \left\{\sum \mu^\alpha (\Delta_{c_1...c_n}), \bigcup \Delta_{c_1...c_n} \supset E\right\}.$$

Розмірністю Хаусдорфа-Безиковича множини E називатимемо число

$$\alpha_\mu(E) = \inf\{\alpha : H_\alpha(E) = 0\} = \sup\{\alpha : H_\alpha(E) \neq 0\}.$$

Розглянемо відображення f множини L на відрізок $[0;1] \subset R^1$. Множину всіх бієктивних відображень f, які зберігають порядок позначимо L^f, для такого класу відображень справедлива наступна теорема.

Теорема. *Для* $\forall \alpha = \{\alpha_k\} \in L$ *переріз* $x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^f_{\alpha_1...\alpha_k}$ *є точкою з відрізка* $[0;1]$, *яку символічно позначатимемо* $\Delta^f_{\alpha_1(x)...\alpha_k(x)...}$, *і називатимемо двійковим* $f-$*кодуванням точки x.*

Нехай $f-$фіксоване відображення з L^f. Розглянемо випадкову величину

$$\xi = \Delta^f_{\eta_1\eta_2...\eta_k...}, \tag{1}$$

двійкові $f-$коди η_k, якої є незалежними випадковими величинами, що набувають значень 0 та 1 з ймовірностями p_{0k} та p_{1k} відповідно ($p_{ik} \geq 0, p_{0k} + p_{1k} = 1$).

Лема. *Функція розподілу випадкової величини* $\xi = \Delta^f_{\eta_1\eta_2...\eta_k...}$ *записується у* *вигляді*

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le 0, \\ \beta_1 + \sum\limits_{i=2}^{\infty}\left[\beta_i \prod\limits_{j=1}^{i-1} p_{\alpha_j(x)j}\right] & при\ x \in [0;1], \\ 1 & при\ x > 1; \end{cases}$$

де $\beta_i = \begin{cases} 0, & якщо\ \alpha_i = 0, \\ p_{0i}, & якщо\ \alpha_i = 1 \end{cases}$, *якщо вона має похідну в точці* $x = \Delta^f_{\alpha_1(x)...\alpha_k(x)...}$

то вона запишеться у вигляді $F_\xi^{/}(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{\prod\limits_{i=1}^{m} p_{\alpha_i(x)i}}{\left|\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)...\alpha_m(x)}\right|}$.

Наступні твердження характеризують структуру розподілу вище описаної випадкової величини.

Т е о р е м а. *Для того, щоб випадкова величина* ξ *мала дискретний розподіл, необхідно і достатньо, щоб*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_n \{p_{nk}\} > 0.$$

Нехай $\delta = (\delta_1 ... \delta_m),\ m \in N$, набори $\delta_i \in \{0;1\}\ i \in \overline{1,m}$. $T_\delta^m -$перетворення довільної точки $x = \Delta_{\alpha_1(x)...\alpha_k(x)...}$ з відрізка $[0;1]$ означимо наступним чином

$$T_\delta^m(x) = \Delta^f_{\delta_1...\delta_m\alpha_{m+1}(x)...}.$$

Т е о р е м а. *Якщо довільну борелівську множину* $E \subset [0;1]$ *нульової міри Лебега,* $T_\delta^m -$*перетворення переводить у нуль-множину, то випадкова величина* ξ *має чистий тип розподілу.*

Т е о р е м а. *Якщо відображення* f *має властивість:*

$$0 < \lambda_1 \le \frac{\left|\Delta_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\alpha_{n+1}}\right|}{\left|\Delta_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}\right|} \le \lambda_2 < 1,\ \forall n \in N,\ \alpha_i \in \{0;1\},$$

то розподіл випадкової величини ξ *є чистим.*

ЛІТЕРАТУРА

1. Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. – 296с.
2. Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения. – К.: Наукова думка,1992. – 208с.
3. Bergman G. A number system with an irrational base // Mathematics magazine. – 1957. – 31. – P. 98-110.

Коваленко В.М.

КРИВІ КОХА, ЇХ ТОПОЛОГО-МЕТРИЧНІ І ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ.

Сніжинку Коха та деякі її узагальнення можна розглядати як образ певної підмножини простору послідовностей $L_s = \{\alpha\colon\ \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k, ...) = \{\alpha_k\}$, $\alpha_k \in N_{s-1}^0 \quad \forall k \in N\}$ при відображенні f (тут і далі $s = 4l + 2$, де $l \in \{0,1,...\} = N_0$), яке задається наступним чином:

$$f\colon \quad \{\alpha_k\} \to q_0 \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{\alpha_k} \cdot q^k ,$$

де $q_0 = const$, ε_{α_k} - корінь s-го степеня з одиниці, тобто

$$\varepsilon_{\alpha_k} = \cos\frac{2\pi\alpha_k}{s} + i \cdot \sin\frac{2\pi\alpha_k}{s} \ ; \ q = \frac{\sin\frac{\pi}{s}}{1 + \sin\frac{\pi}{s}} .$$

При $s = 6$, ми отримаємо сніжинку Коха побудовану на правильному трикутнику симетричному відносно дійсної вісі, з центром у початку координат.

При відображенні f (для кожного фіксованого s) прообразом відповідної кривої Коха буде підмножина простору L_s (позначимо її W), яка складається з точок $\alpha = \{\alpha_k\}$ для елементів α_k яких виконуються певні співвідношення. Аналітичне задання множини W ми тут не наводимо бо воно досить громіздке.

Теорема. Ентропійна розмірність множини $W' = f(W)$ дорівнює

$$\alpha_p(W') = \ln(2l + 2) \cdot \ln^{-1}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{s}}{1 + \sin\frac{\pi}{s}}\right).$$

Простір L_s можна відобразити на відрізок $[0;1]$ за допомогою наступного відображення:

$$\varphi\colon \quad \{\alpha_k\} \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s^k}.$$

Теорема. Множина $W'' = \varphi(W)$ є: 1) континуальною; 2) ніде не щільною; 3) множиною, всі точки якої є її точками конденсації; 4) множиною, ентропійна розмірність якої дорівнює $\alpha_p(W'') = \log_s(2l + 2)$.

В просторі L_s можна ввести такі топології щоб відображення f і φ були неперервними та взаємно однозначними.

ЛІТЕРАТУРА

1. Працьовитий М.В. фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. – 296с.

Коваленко Д.О., Жданова Ю.Д., Турбин А.Ф.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОБАНОВА НАД ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ПОЛЯМИ

В данной работе вводятся в рассмотрение мультипликативные преобразования Лобанова над произвольными полями, доказывается, что их множество образует группу и находится порядок этой группы. Также находятся инварианты, которые могут быть использованы при контроле правильности кодирования.

Пусть есть упорядоченное множество $X(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\forall i \in \overline{1,n}$ $x_i \in C \setminus \{0\}$, где $\boldsymbol{C}$ — произвольное поле. В частности, если взять поле действительных чисел, то множество X может рассматриваться как $\boldsymbol{n}$-мерный вектор.

Определение. *Мультипликативным преобразованием Лобанова индекса* j *второго рода назовём:*

$$\widetilde{L}_j^* X = \begin{cases} \left(x_1^{-1}, x_2^{-1}, ..., x_{j-1}^{-1}, \prod_{i=1}^{n} x_i, x_{j+1}^{-1}, ..., x_n^{-1} \right), 0 < j \le n \\ (x_1, x_2, ..., x_n), \ j = 0 \\ \left(x_1, x_2, ..., x_{-j-1}, \prod_{i=1}^{n} x_i^{-1}, x_{-j+1}, ..., x_n \right), -n \le j < 0 \end{cases}$$

Определение. *Мультипликативным преобразованием Лобанова индекса* j *первого рода назовём:*

$$L_j^* X = \begin{cases} \left(x_1 x_j^{-1}, x_2 x_j^{-1}, ..., x_{j-1} x_j^{-1}, x_j^{-1}, x_{j+1} x_j^{-1}, ..., x_n x_j^{-1} \right), 0 < j \le n \\ (x_1, x_2, ..., x_n), \ j = 0 \\ \left(x_1^{-1} x_{-j}, x_2^{-1} x_{-j}, ..., x_{-j-1}^{-1} x_{-j}, x_{-j}, x_{-j+1}^{-1} x_{-j}, ..., x_n^{-1} x_{-j} \right), -n \le j < 0 \end{cases}$$

Последовательное применение преобразований будем также записывать как по мультииндексу $\langle k_1, k_2, ..., k_t \rangle$.

Далее отдельно для преобразований первого и второго рода доказывается несколько лемм (в частности, что последовательным применением преобразований можно получить любую перестановку и что преобразования есть инволюцией) и находятся их матричные представления. Затем доказывается, что преобразования как первого так и второго рода составляют группы, изоморфные $S_{n+1} \otimes S_{n+1}$.

В заключении для преобразований как первого, так и второго рода строятся инварианты: $q(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i + x_i^{-1} \right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k \ne i} x_i x_k^{-1}$, для $\forall j \in \{-n, ..., n\}$, $q(X) = q\left(L^*{}_j X\right)$

$$\widetilde{q}(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i + x_i^{-1} \right) + \prod_{i=1}^{n} x_i + \prod_{i=1}^{n} x_i^{-1}, \ \forall j \in \{-n, ..., n\}, \ q(X) = q\left(\widetilde{L}^*{}_j X\right)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Великий А.П., Турбин А.Ф., Преобразования А.И. Лобанова//Кибернетика и системный анализ (в печати)

2. Погоруй А. О., Коваленко Д.О., $\widetilde{L}$-преобразования. — Готовится к печати.

Коваль В.В.

N-САМОАФІННІ ВЛАСТИВОСТІ ГРАФІКІВ ОДНОГО КЛАСУ НІДЕ НЕДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

Самоподібні множини є одним з найкраще вивчених класів фрактальних множин. Природним узагальненням класу самоподібних множин є клас самоафінних множин, тобто таких, що розпадаються на частини, афінно-еквівалентні всій множині. На відміну від самоподібних для самоафінних множин,багато питань залишаються досі відкритими. Зокрема, знаходження розмірності Хаусдорфа-Безиковича самоафінних фракталів в багатьох випадках залишається складною задачею. Зручний аналітичний апарат для опису самоподібних та самоафінних множин запропонований в [1].

Означення. Множина $A \subset R^n$ називається самоподібною (самоафінною), якщо існує множина $F=\{f_1, f_2,\ldots, f_n\}$ перетворень подібності (афінних перетворень) простору R^n така, що

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} f_k(A).$$

Дана конструкція може бути узагальнена на випадок зчисленної кількості перетворень. Приведемо це узагальнення для самоафінних множин.

Означення. Множина $A \subset R^n$ називається N-самоафінною, якщо існує множина $F=\{f_1, f_2, \ldots\}$ афінних перетворень простору R^n така, що

$$A = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} f_k(A)}.$$

Неперервні ніде недиференційовні функції з топологічної точки зору становлять абсолютну більшість з усіх неперервних функцій. Але сьогодні вони є мало вивчені. Однією з причин цього є складність їх аналітичного задання. Класичні приклади ніде не диференційовних функцій задавались, як правило сумою функціонального ряду, або рекурентною геометричною конструкцією. Останнім часом для задання не диференційованих функцій ефективно використовується метод "перетворювача". Чи не найпростішим за побудовою прикладом такої функції є функція, запропонована в [3]. Вона задається за допомогою перетворювача. Нехай аргумент поданий в трійковому представленні, а значення функції в двійковому:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k 3^{-k}, \; y = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k 2^{-k}.$$

Тоді функція $y=f(x)$ визначається наступним чином:

$$\beta_1 = \begin{cases} 0, \; \textit{якщо} \;\; \alpha_1 = 0, \\ 1, \; \textit{якщо} \;\; \alpha_1 \neq 0, \end{cases} \quad , \quad \beta_k = \begin{cases} \beta_{k-1}, \; \textit{якщо} \;\; \alpha_k = \alpha_{k-1}, \\ 1-\beta_{k-1}, \; \textit{якщо} \;\; \alpha_k \neq \alpha_{k-1} \end{cases}.$$

Коректність означення, неперервність і ніде недиференційовність функції f доведені в [3]. Виявляється так означена функція має ряд фрактальних властивостей. Зокрема, її множини рівня мають дробову розмірність, а її графік є N-самоафінною множиною.

Теорема. *Графік описаної вище функції f є N-самоафінною множиною.*

Множину перетворень F можна подати в такому вигляді:

$$f_{2n+1}:\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3^{n+1}}x + \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{3^k} \\ y' = \dfrac{1}{2^{n+1}}y + \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^k} \end{cases},\ n = 0, 1, 2, ...$$

$$f_2:\begin{cases} x' = 1 - \dfrac{1}{3}x \\ y' = 1 - \dfrac{1}{2}y \end{cases}, \qquad f_{2n+2}:\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{3^{n+1}}x + 1 - \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{3^k} \\ y' = \dfrac{1}{2^{n+1}}y + \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^k} \end{cases},\ n = 1, 2, ...$$

Аналогічні самоафінні властивості має клас функцій, які задаються таким самим чином, але з іншою системою числення для аргументу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Hutchinson J.E. "Fractals and self-similarity"// Indiana Univ. Math. J. –1981. –30. – P.713-747.
2. Працьовитий М.В. "Фрактальні властивості однієї неперервної ніде недиференційованої функції"// Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова №3 –2002. –С.351-362.

Парусімов. Г.В.

МНОЖИНА ПОРЯДКІВ ІНВЕРСІЇ ПРИ ОБЕРТАЛЬНИХ ІНВЕРСНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ, ВИГЛЯД РІВНЯННЯ КРИВОЇ ІНВЕРСІЇ

Існує велика кількість відображень площини на себе, які можна класифікувати як інверсію того чи іншого типу відносно деякої кривої γ .[1].

Постає правомірне питання про те, чи існують обертальні інверсні відображення, відносно однієї і тієї ж кривої, але з різними порядками інверсії.

Нехай алгебраїчна крива

$$\gamma:\quad \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} a_{k-i,i}x^{k-i}y^i = 0 \tag{1}$$

n-го порядку є кривою інверсії деякого інверсного відображення із порядком η.

В полярній системі координат рівняння (1) має вигляд:

$$\gamma:\quad \sum_{k=0}^{n} l_1^k \sum_{i=0}^{k} a_{k-i,i}\cos^{k-i}\varphi\cdot\sin^i\varphi = 0 \tag{2}$$

Припустимо, що рівняння (2) розв'язне відносно l_0^m абсолютно однозначно, єдиним чином (випадок, коли $l_0 \equiv 0$ ми відкидаємо, бо він суперечить самому поняттю кривої інверсії). Для цього достатньо, щоб рівняння кривої γ складалося з двох однорідних поліномів, один з яких має степінь n, а другий – $t<n$, крім того $НСД\left(\sum_{i=0}^{n} a_{n-i,i}\cos^{n-i}\varphi\sin^{i}\varphi,\quad \sum_{i=0}^{t} a_{t-i,i}\cos^{t-i}\varphi\sin^{i}\varphi\right)=a=const\neq 0$.

Тоді рівняння для l_1^m має такий вигляд:

$$l_0^m=-\frac{\sum_{i=0}^{t} a_{t-i,i}\cos^{t-i}\varphi\cdot\sin^{i}\varphi}{\sum_{i=0}^{n} a_{n-i,i}\cos^{n-i}\varphi\cdot\sin^{i}\varphi}, \tag{3}$$

при цьому $m=n-t$.

Користуючись принципом задання обертальної інверсії, враховуючи інваріантність ГМТ γ, а також вважаючи, що степінь кожної із сум у рівнянні розглядуваної кривої, що отримується з (3) після накладання цих умов, $k_j\in N \quad j=\overline{1,2}$, при цьому $k_1=n$ і $k_2=t$, ми приходимо до висновку:

$$\gamma:\quad \sum_{i=0}^{n} a_{n-i,i}x^{n-i}y^{i}+\sum_{i=0}^{n-2} a_{n-2-i,i}x^{n-2-i}y^{i}=0, \tag{4}$$

$$\eta=2. \tag{5}$$

Приймаючи до уваги, що ГМТ γ має бути не виродженим, доводиться , що у даному випадку крива інверсії являє собою еліпс, центр якого співпадає з полюсом інверсії, і це можливо лише при виконанні таких умов: $a_{2,0}>0$, $a_{0,2}>0$, $\left|a_{1,1}\right|\neq 2\sqrt{a_{2,0}a_{0,2}}$ та $a_{0,0}<0$. Але, скажімо, алгебраїчні криві виду $x^p+y^p=a^p$, де $a=const>0$ і $p=2s,\quad s\in N/\{0\}$, які є окремим випадком кривих Ламе, також можуть виконувати функції кривої інверсії в обертальних інверсіях із полюсом у центрі даного замкнутого ГМТ γ, не входять до складу кривих, що описуються рівнянням (4). Для того, щоб поповнити цей клас, необхідно зробити деяку поправку. Вважатимемо, що $k_j\in Q \quad j=\overline{1,2}$, але $k_1\delta=n$ і $k_2\delta=t$. Тоді ми отримуємо інверсне відображення відносно алгебраїчної кривої

$$\gamma:\quad \sum_{i=0}^{n} a_{n-i,i}x^{n-i}y^{i}+a_{0,0}=0, \tag{6}$$

де $a_{n,0}>0$, $a_{0,n}>0$ і $a_{0,0}<0$, $n=2p,\quad p\in N$, із порядком інверсії $\eta=2$.

Розглянемо тепер випадок, коли l_0^m визначається однозначно з точністю до знака. В цьому випадку крива γ має розкладатися в добуток двох кривих γ_1 і γ_2, кожна з яких володіє властивістю інваріантного перетворення І-го роду. В цьому випадку $\eta=\eta_1=\eta_2=2$, де η_1 і η_2 – порядки інверсії інверсних відображень відносно, відповідно, кривих γ_1 і γ_2, з яких складається ГМТ γ, визначених, відповідно, в областях D_1 і D_2; η – порядок інверсії відносно кривої γ, введеної на площині α.

Зупинимося на випадку, коли ГМТ γ розкладається в добуток кривих γ_1, γ_2, ..., γ_k, рівняння кожної з яких розв'язне відносно $l_0^{m_i}$, $\quad i=\overline{1,k}$, $k\geq 2$ абсолютно однозначно. В цьому випадку кожна з цих кривих, внаслідок неперервності кривої γ, та вимоги відсутності точок самоперетину, відмінних від точки $O(0.0)$, як у кожної з кривих γ_k та всього виродженого ГМТ γ (в противному разі порушується вимога однозначності визначення розглядуваного ГМТ в напрямку вектора $\vec{\tau}$), кожна з кривих γ_i, $i=\overline{1,k}$, повинна мати по дві асимптоти, що проходять через центр інверсії, або проходити через нього, маючи точку самоперетину в цій точці. Порядок інверсного відображення відносно алгебраїчного ГМТ γ_i, визначеного в секторній області D_i з вершиною у полюсі інверсії, чи двох вертикальних кутах, утворених його асимптотами $\eta_i = 2$, оскільки $l_0^{m_i}$ визначається абсолютно однозначно для розглядуваного ГМТ згідно припущення. А отже прядок інверсії, введеної на площині α відносно кривої γ, $\eta = 2$.

Порядок інверсії $\eta = 2$, і у випадку, коли крива інверсії є трансцендентною кривою, яка складається з ланок алгебраїчних ГМТ, наприклад,

$$x^2\left(\left[1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]-\left[\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right]\right)+y^2=R^2,$$

бо в цьому випадку порядок кожного інверсного відображення відносно відповідної алгебраїчної кривої, що розглядаються, відповідно, в областях , D_k, де $k=\overline{1,m}$ і $m \in N$, $\eta_k = 2$.

Теорема 1. Порядок обертального інверсного відображення відносно будь-якої алгебраїчної кривої, в тому числі й такої, що може бути замінена еквівалентним їй трансцендентним ГМТ, а також будь-якої трансцендентної кривої, що складається з ланок алгебраїчних кривих, $\eta = 2$; рівняння кривої інверсії при цьому має спеціальний вигляд.

ЛІТЕРІТУРА

1. Парусімов Г.В. Інверсія як особливий вид конформних відображень. // Молодь, освіта, наука, культура і національна самосвідомість.–К.: видав. Європейського університету, 2002, Т2.– с. 237 –241.

Погоруй А.А., Коваленко Д.О.

СОПРЯЖЁННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ А.И. ЛОБАНОВА

В данной работе вводится в рассмотрение новый тип преобразований, который авторы называют $\tilde{L}$ -преобразованиями, или преобразованиями Лобанова второго рода. По свойствам эти преобразования являются в определённом смысле сопряжёнными известным преобразованиям [1], которые мы будем называть преобразованиями Лобанова первого рода, и могут рассматриваться как некая альтернатива L-преобразованиям. В статье указывается, что множество $\tilde{L}$-преобразований образует группу и находится матричное представление, порядок этой группы.

Определим *преобразование* $\tilde{L}_j$ *вектора* $\vec{x}\left(x_1, x_2, ..., x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, ..., x_n\right)$ следующим образом:

$$\tilde{L}_j\,\vec{x} = \begin{cases} \left(-x_1, -x_2, ..., -x_{j-1}, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i, -x_{j+1}, ..., -x_n\right), 0 < j \le n \\ \vec{x},\ j = 0 \\ \left(x_1, x_2, ..., x_{-j-1}, -\sum\limits_{i=1}^{n} x_i, x_{-j+1}, ..., x_n\right) - n \le j < 0 \end{cases}$$

Из определения следует, что

$$\tilde{L}_{-j}\,\vec{x} = -\tilde{L}_j\,\vec{x} \qquad (1)$$

Вводятся преобразования с мультииндексом

$$\tilde{L}_{k_p}\left(\tilde{L}_{k_{p-1}}\left(...\tilde{L}_{k_1}(\vec{x})...\right)\right) = \tilde{L}_{k_p}\ \tilde{L}_{k_{p-1}}\ ...\tilde{L}_{k_1}(\vec{x}) = \tilde{L}\left\langle k_1, k_2, ..., P_{k_p}\right\rangle(\vec{x})$$

Доказывается, что $\tilde{L}$-преобразование являются инволюцией и с помощью их можно получить любую перестановку вектора.

Находится матричное представление для преобразования с мультииндексом, доказывается, что множество преобразований с мультииндексом составляют группу мощности , изоморфную $S_{n+1} \otimes S_{n+1}$.

Строится калибровочная функция

$$t(\vec{x}) = \max\left\{\sum_{x_i \ge 0} x_i, -\sum_{x_i < 0} x_i\right\}$$

и доказывается, что она является инвариантом для $\tilde{L}$-преобразований, т.е.

$$t\left(\tilde{L}_j\,\vec{x}\right) = t(\vec{x}),\ -j \le n \le j$$

(контроль правильности кодирования).

В заключение отметим, что $\tilde{L}$-преобразования наряду с преобразованиями Лобанова первого рода [1] могут быть использованы для шифрования информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Великий А.П., Турбин А.Ф., Преобразования А.И. Лобанова//Кибернетика и системный анализ (в печати).
2. Садовничий В.А.Теория операторов — М.: МГУ, 1986. — 370 с.

Самкіна Н.М.

МЕТРИЧНА ТЕОРІЯ ФАКТОРІАЛЬНИХ ПРЕДСТАВЛЕНЬ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

Розглянемо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k!} \qquad (1)$$

де $\alpha_k \in N_k^0 = \{0; 1; ...; k\}, \; k = \overline{1, \infty}$.

Лема 1. *Для довільної послідовності* $\{\alpha_k\}$, $\alpha_k \in N_k^0$ *ряд* (1) *збігається до деякого числа* $x \in [0; e]$.

Нехай x є сумою ряду (1). Введемо позначення

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!} = \Delta_{a_1 ... a_k ...}, \qquad (2)$$

$$\left\lfloor \Delta_{a_1 ... a_k 000...}; \Delta_{a_1 ... a_k (k+1)(k+2)...} \right\rfloor = \Delta_{a_1 ... a_k}. \qquad (3)$$

Відрізок $\Delta_{a_1 ... a_k}$ називатимемо *відрізком k-го рангу.*

Лема 2. *Для довільної точки* $x \in [0; e]$ *існує принаймні одна послідовність* $\{\alpha_k(x)\}$, $\alpha_k \in N_k^0$, *що*

$$x = \Delta_{a_1(x) ... a_k(x) ...}.$$

З леми 2 зрозуміло, що для деяких точок $x \in [0; e]$ існує кілька способів зображення їх у вигляді (2). Наприклад, оскільки $\Delta_0 \cap \Delta_1 = [1; e-1]$, то точки $x \in [1; e-1]$ можуть бути зображені у вигляді (2) принаймні двома способами.

Рангові відрізків (3) володіють наступними властивостями.

***Властивість* 1.** Довжина відрізка m-го рангу

$$\left| \Delta_{a_1 ... a_m} \right| = d_m = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k!} \to 0 \; (m \to \infty).$$

***Властивість* 2.** $\forall m \in N$

$$\Delta_{a_1 ... a_{m-1} i} \cap \Delta_{a_1 ... a_{m-1}(i+1)} = \left\lfloor \Delta_{a_1 ... a_{m-1}(i+1)00...}; \Delta_{a_1 ... a_{m-1} i (m+1) m+2)...} \right\rfloor = T_m(i; i+1),$$

де $i = \overline{0, m-1}$, тобто кожні два сусідні відрізки одного рангу мають "перекриття", причому довжина кожного з цих перекриттів

$$\left| T_m(i; i+1) \right| = t_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \to 0 \; (m \to \infty).$$

Відрізок $T_m(i; i+1)$ називатимемо *перекриттям m–го рангу*.

***Властивість* 3.** $\forall m \in N$

$$\Delta_{a_1 \ldots a_{m-1} i} \cap \Delta_{a_1 \ldots a_{m-1} j} = \emptyset,\ i < j \notin \{i, i+1\},$$

де $i = \overline{0, m-1}$, тобто кожні два несусідні відрізки одного рангу не мають спільних точок.

Властивість 4. $T_1(0;\ 1) = \Delta_{02} = \Delta_{10}$;

$T_{m-1}(i;\ i+1) = \Delta_{a_1 \ldots a_{m-2} im} = \Delta_{a_1 \ldots a_{m-2}(i+1)0}$, $i = \overline{0, m-2}$, $m = \overline{3, \infty}$, тобто перекриттям m – 1-го рангу є ті і лише ті відрізки m-го рангу, які співпадають між собою.

Точки $x \in [0;\ e]$ можуть бути зображені у вигляді (2) або одним, або скінченною кількістю, або континуальною кількістю способів. Позначимо через A_1, A_K, A_c множини точок $x \in [0;\ e]$, які мають відповідно одне, скінченну кількість, континуальну кількість зображень у вигляді (2). Вивчимо деякі властивості цих множин.

Теорема 1. *Множина A_1, A_K, A_c є континуальними.*

Теорема 2. *Множина A_1, є фрактальною множиною.*

ЛІТЕРАТУРА

1. *Працьовитий М.В.* фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. – 296с.
2. *Самкіна Н.М. Школьний О.В.* Факторіальна система числення та пов'язані з нею розподіли ймовірностей // Фрактальний аналіз та суміжні питання. – Київ: ІМ НАН України – НПУ ім. М.П. Драгоманова. – 1998, №2. – с.157-165.

Симогин А.А.

ОЦЕНКА НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ В СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ, ВОЗМУЩЕННЫХ ПРОЦЕССАМИ СО СЛАБОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ

Пусть в области $[0, T] \times R_n \times R_1 \times \Theta$ определена неслучайная функция $A(t, x, u, \theta)$, а в области $[0, T] \times R_n$ - неслучайная функция $B(t, x)$. Рассмотрим в слое $E_{n+1}^{(T)} = [0, T] \times R_n$ задачу Коши, сформулированную для уравнения

$$\frac{\partial U_\varepsilon^{\theta_0}(t, x)}{\partial t} = L_{t,x} U_\varepsilon^{\theta_0}(t, x,) + A\left(t, x, U_\varepsilon^{\theta_0}(t, x), \theta_0\right) + B(t, x)\eta(t/\varepsilon), \qquad (1)$$

$$U_\varepsilon^{\theta_0}(0, x) = u_0(x),$$

здесь ε, $\varepsilon > 0$, - малый параметр, $\theta_0 \in \Theta \subset R_1$ - неизвестный параметр, который надлежит оценить по наблюдаемой на $E_{n+1}^{(T)}$ траектории поля $U_\varepsilon^{\theta_0}(t, x)$. Случайный процесс $\{\eta(t),\ t \geq 0\}$ является стационарным в узком смысле случайным процессом, удовлетворяющим условию равномерно сильного перемешивания с коэффициентом перемешивания $\varphi(s) \to 0$ при $s \to 0$. $L_{t,x}$ – равномерно эллиптический оператор.

Относительно процесса $\{\eta(t),\ t \geq 0\}$ потребуем выполнения условий

А.1) *для некоторого* r, $2 < r < 5$ *справедливо* $\varphi(s) \leq As^{-g}$,

где $g > j(u)(j(u)-1)$, $u = \dfrac{2+5r}{2(5-r)}$, $j(u) = 2\min\{k \in N : 2k \geq u\}$.

А.2) $E\eta(t) = 0$, $E|\eta(t)| = b$, $D\int_0^T \eta(t)dt = 1$,

А.3) $0 < \sigma_0 = E\left(\int_0^T \eta(t)dt\right)^2 + 2\sum_{j=1}^{\infty} E\int_0^T \eta(t)dt\int_{jT}^{(j+1)T} \eta(t)dt < +\infty$,

А.4) $P\left\{\sup\limits_{0\leq t\leq T}|\eta(t)| > R\right\} < C_1 \exp\{-C_2 R\}$.

А.5) $E\left|\int_0^T \eta(s)ds\right|^r < +\infty$.

Вместе с (1) рассмотрим задачу Коши для уравнения Ито

$$\partial_t X_\varepsilon^{\theta_0}(t,x) = L_{t,x}X_\varepsilon^{\theta_0}(t,x)dt + A\left(t,x,U_0^{\theta_0}(t,x),\theta\right)dt + \\ + \sqrt{\varepsilon\sigma_0}B(t,x)dw(t), \qquad X_\varepsilon^{\theta_0}(0,x) = u_0(x). \tag{2}$$

Здесь $\{w(t),\ t \geq 0\}$ – стандартный винеровский процесс, а $U_0^\theta(t,x)$ суть решение задачи Коши для детерминированного уравнения

$$\partial_t U_0^{\theta_0}(t,x) = L_{t,x}U_0^{\theta_0}(t,x)dt + A\left(t,x,U_0^{\theta_0}(t,x),\theta_0\right)dt,$$

$$U_0^{\theta_0}(0,x) = u_0(x).$$

Определение. Назовем $\tilde{\theta}_\varepsilon$ оценкой **максимального квазиправдоподобия** неизвестного параметра θ, если она доставляет максимум функционалу правдоподобия на наблюдаемой траектории решения уравнения (1).

Теорема 4.2. Пусть существуют и единственны решения задач (1) и (2). Процесс $\{\eta(t),\ t \geq 0\}$ является стационарным в узком смысле случайным процессом, относительно которого выполнены условия А.1)–А.5). Функция $A(t,x,u)$ удовлетворяет требованиям

$$\int_0^T \left|\frac{A\left(t,y,U_0^{\theta_1}(t,y),\theta_1\right) - A\left(t,y,U_0^{\theta_2}(t,y),\theta_2\right)}{B^2(t,y)}\right| dt \leq L|\theta_1 - \theta_2|,$$

$$\sup_{0\leq t\leq T}\int_{R_n} \left|\frac{A\left(t,y,U_0^{\theta_1}(t,y),\theta_1\right) - A\left(t,y,U_0^{\theta_2}(t,y),\theta_2\right)}{B(t,y)}\right| dx \leq L|\theta_1 - \theta_2|$$

$$\int_0^T \left|\frac{d}{dt}\int_{R_n} \frac{A\left(t,y,U_0^{\theta_1}(t,y),\theta_1\right) - A\left(t,y,U_0^{\theta_2}(t,y),\theta_2\right)}{B(t,y)} dx\right| dt \leq L|\theta_1 - \theta_2|,$$

$$\int_0^T \int_{R_n} \left[\frac{A\left(s,y,U_0^{\theta_1}(s,y),\theta_1\right) - A\left(s,y,U_0^{\theta_2}(s,y),\theta_2\right)}{B(s,y)}\right]^2 dyds \leq L|\theta_1 - \theta_2|^2,$$

$$\int_0^T \int_{R_n} \left[\frac{A\left(s,y,U_0^{\theta_1}(s,y),\theta_1\right) - A\left(s,y,U_0^{\theta_2}(s,y),\theta_2\right)}{B(s,y)}\right]^2 dyds \geq C|\theta_1 - \theta_2|^2,$$

а функция $B(t,x)$ – условиям

$\int_0^T \int_{R_n} \left| L_{t,x}^{*} B(t,x) \right| dxdt \le A_1$, где $L_{t,x}^{*}$ *- оператор, сопряженный к* $L_{t,x}$,

$\int_0^T \int_{R_n} \left| \frac{\partial B(t,x)}{\partial t} \right| dxdt \le A_2$, $\sup\limits_{0\le t\le T} \int_{R_n} \left| B(t,x) \right| dx \le A_3$, $\lim\limits_{|x|\to\infty} \left| \frac{\partial B(t,x)}{\partial x_i} \right| = 0$, $i = \overline{1,n}$.

Тогда для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, таких что $\mu(\varepsilon) < \frac{C}{8L\sqrt{\sigma_0}}$, и всех $H > \frac{N_1 \mu(\varepsilon)}{\gamma_\varepsilon}$ справедливо неравенство для вероятности больших уклонений оценки максимального квазиправдоподобия $\tilde{\theta}_\varepsilon$ от истинного значения θ_0

$$P_\varepsilon^{\theta_0} \left\{ \frac{\left| \tilde{\theta}_\varepsilon - \theta_0 \right|}{\sqrt{\varepsilon}} > H \right\} \le \frac{16B_3}{B_2 H} \exp\left\{ -\frac{B_2}{4} H^2 \right\} + 2\mu(\varepsilon) +$$

$$+ \frac{C_0 \sqrt{T}}{\gamma_\varepsilon H / N_1 - \mu(\varepsilon)} \exp\left\{ -\frac{\left(\gamma_\varepsilon H / N_1 - \mu(\varepsilon) \right)^2}{2T} \right\},$$

здесь $\gamma_\varepsilon = \frac{C}{4L^2 H} - \frac{2\sqrt{\sigma_0}\, \mu(\varepsilon)}{LH}$, $B_2 = \frac{C^2}{256\sigma_0 L}$, $B_3 = \frac{32 B_0 L^2}{C\sigma_0}$, $C_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$,

$$N_1 = \exp\left\{ D_2 C T \left(\frac{\pi}{\mu} \right)^{n/2} \right\} \left[C \left(\frac{\pi}{\mu} \right)^{n/2} \sqrt{\sigma_0} \left(A_1 + A_2 + A_3 \right) \right], \; B_0 \le 16 + 18 \cdot 3^{5/4},$$

функция $\mu(\varepsilon)$ определяется соотношением

$$\mu(\varepsilon) = C \left(\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^{r/2-1} E \left| \int_0^T \eta(u) du \right|^r \right)^{1/(r+1)}.$$